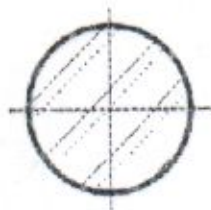


Questão 3 (valor: 10,0 pontos)

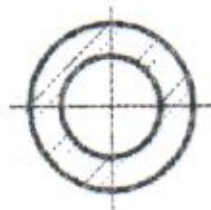
O conceito de rigidez é um dos mais importantes em projeto de máquinas.

A esse respeito, responda ao solicitado abaixo.

- Explique em poucas palavras o que é rigidez.
- Quais os fatores que determinam a rigidez de um componente mecânico?
- Como a rigidez e a massa de um componente estão relacionadas com sua frequência natural?
- Entre os perfis apresentados abaixo, qual você escolheria como o mais adequado à estrutura de um veículo que será submetido a carregamentos combinados de flexão e torção, variáveis em direção e intensidade, de modo que o mesmo possa ter rigidez satisfatória com um peso relativamente reduzido? Justifique sua resposta.



(a)



(b)



(c)



(d)

Padrão de Resposta Esperado

- Rigidez pode ser definida como a relação que existe entre o deslocamento que ocorre em um componente mecânico (estrutural) em equilíbrio, causado por uma ação ou conjunto de ações (forças e torques), e a intensidade destas ações.  
No caso simples de uma mola unidimensional em equilíbrio, sob a ação de uma força  $F$ , tem-se:

$$F = Kx \text{ (fórmula básica)}$$

onde  $K$  é a rigidez

- Material, geometria e estado de tensões.
- Um aumento da rigidez produz um aumento nas frequências naturais do componente, enquanto que um aumento na massa provoca um efeito contrário. Por exemplo, para um sistema com 1 grau de liberdade, a frequência natural é dada pela expressão

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

onde  $K$  representa a rigidez e  $M$  a massa.

- Perfil Tubular – O perfil tubular tem praticamente a mesma rigidez que a barra cilíndrica de seção cheia com mesmo diâmetro, contudo tem massa menor. Além disso, é um perfil fechado com seção transversal axialmente simétrica. Para que perfis abertos, como os (c) e (d), tenham a mesma rigidez que um perfil tubular, suas dimensões devem ser bem maiores, o que os torna mais pesados que um perfil tubular dimensionado para a mesma aplicação. Outro aspecto relevante é a falta de simetria axial dos perfis abertos, que, ao contrário dos perfis tubulares, não têm a mesma rigidez nos diferentes planos de flexão.

9

Para evitar problemas no funcionamento de um equipamento, cuja massa é de 10 kg, deseja-se limitar a amplitude das velocidades a que ele será submetido devido a vibrações em serviço. Testes indicam que acima de 100 Hz a base rígida sobre a qual ele vai ser montado experimenta as oscilações de maiores amplitudes, e que devem, portanto, ser minimizadas. Observa-se ainda que a amplitude destes deslocamentos varia muito pouco nesta faixa de frequências. Um engenheiro é incumbido de projetar a fixação do equipamento sobre a base rígida e decide modelar o conjunto equipamento/sistema de fixação como um oscilador linear com um único grau de liberdade.

A razão entre as amplitudes da velocidade da massa de um oscilador linear e do deslocamento da base sobre a qual ele está montado, varia com a frequência de acordo com a expressão:

$$\frac{v}{y} = 2 \pi f \sqrt{\frac{1 + (2\zeta f/f_n)^2}{(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2}}$$

onde  $v$  representa a amplitude da velocidade,  $y$  a amplitude do deslocamento da base,  $f$  a frequência de oscilação da base,  $f_n$  a frequência natural de vibração do oscilador, e  $\zeta$  o coeficiente de amortecimento do sistema, relacionado com a constante de amortecimento,  $c$ , através da equação:

$$\zeta = \frac{c}{4 \pi m f_n}$$

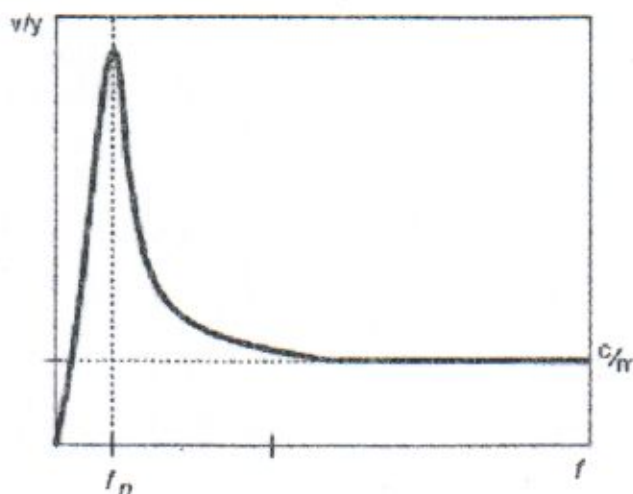
onde  $m$  é a massa do oscilador.

- a) Esboce o gráfico da razão entre a amplitude da velocidade do oscilador e a amplitude do deslocamento da base em função da frequência. (valor: 5,0 pontos)
- b) O engenheiro dispõe de três diferentes sistemas de fixação, para os quais o fabricante fornece as constantes de mola equivalente,  $K_{eq}$ , e os coeficientes de amortecimento equivalentes,  $C_{eq}$ , reproduzidos na tabela abaixo. Qual deles você julga ser o mais apropriado? Justifique sua resposta. (valor: 5,0 pontos)

SISTEMA DE FIXAÇÃO	$K_{eq}$ (N/m)	$C_{eq}$ (N.s/m)
Sistema A	4000	40
Sistema B	4000	20
Sistema C	16000	80

Padrão de Resposta Esperado

a)



b) O sistema de fixação mais indicado é o SISTEMA B.

Justificativa:

SISTEMA	$f_n$ (Hz)	$\zeta$	$4\pi\zeta f_n = c/m$
Sistema A	$10 / \pi$	0,10	4
Sistema B	$10 / \pi$	0,05	2
Sistema C	$20 / \pi$	0,10	8

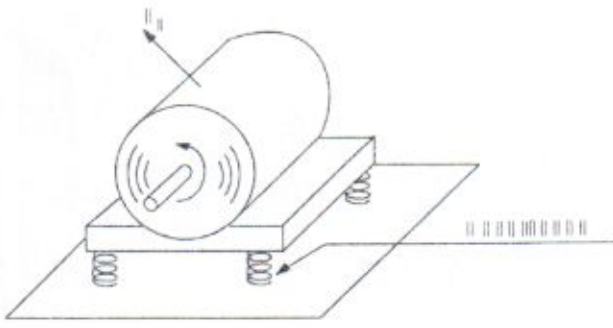
Nos três casos a frequência natural do sistema é muito menor do que  $100 \text{ Hz}$ . Pode-se então considerar apenas o limite da curva de resposta quando  $f$  é muito maior que  $f_n$ , ou seja,

$$\frac{v}{y} = 4\pi\zeta f_n = \frac{c}{m}$$



**6**

O motor elétrico de acionamento de um sistema mecânico possui massa de 20 kg e deve ser instalado sobre quatro absorvedores de vibração, conforme ilustrado na figura abaixo.



Esse motor deve operar na faixa de 100 a 1000 rpm, e seu rotor possui um desbalanceamento representado pela força  $F_0 = 0,05 \omega^2$ , onde  $F_0$  é expressa em newtons e  $\omega$  é a rotação do motor em rad/s. Considere os três tipos de absorvedores apresentados na Tabela, despreze qualquer efeito dissipativo e admita apenas o movimento vibratório na direção vertical.

- a) Determine as frequências de ressonância do sistema correspondentes aos três tipos de absorvedores de vibrações apresentados, obtendo os resultados em rpm. (valor: 4,0 pontos)
- b) Especifique o tipo de absorvedor que deve ser utilizado para atender a requisitos de montagem que limitam em 1,0 mm o deslocamento vibratório vertical máximo do motor. (valor: 6,0 pontos)

**Dados / Informações Adicionais**

**Tabela**  
**Constantes Elásticas dos absorvedores de vibrações**

Tipo de Absorvedor	Constante Elástica de cada absorvedor
A	200.000 N/m
B	20.000 N/m
C	445 N/m

Amplitude do movimento para vibrações forçadas: 
$$x_{mv} = \frac{F_0}{k_{eq}} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

onde  $k_{eq}$  é a rigidez equivalente do conjunto de absorvedores, e  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema.

Questão nº 6

Padrão de Resposta Esperado:

a) A frequência natural para um sistema com um grau de liberdade é definida por  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$ , onde  $k_{eq}$  é a constante elástica equivalente, e  $m$ , a massa do sistema (motor). Assim, sendo  $k_{eq} = 4k$ , tem-se para cada um dos absorvedores apresentados:

Absorvedor A:  $\omega_n = \sqrt{\frac{4 \times 200.000}{20}} = 200 \text{ rad/s} = 1910 \text{ rpm}$  (valor: 1,0 ponto)

Absorvedor B:  $\omega_n = \sqrt{\frac{4 \times 20.000}{20}} = 63,2 \text{ rad/s} = 604 \text{ rpm}$  (valor: 1,0 ponto)

Absorvedor C:  $\omega_n = \sqrt{\frac{4 \times 445}{20}} = 9,4 \text{ rad/s} = 90 \text{ rpm}$  (valor: 1,0 ponto)

Como são desconsiderados os efeitos dissipativos, estas serão as frequências de ressonância do sistema. (valor: 1,0 ponto)

b) Ao utilizar-se o absorvedor B, o sistema apresentará uma frequência de ressonância dentro da faixa de operação do motor. Assim, pode-se descartar este absorvedor. (valor: 1,0 ponto)

Utilizando-se a equação da amplitude do movimento,  $x_{m\&S} = \frac{F_0}{k_{eq}} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_0}{k_{eq} - m\omega^2}$  podem-se analisar as condições que

atendem a um deslocamento máximo de 0,001 m para as rotações extremas de operação do motor, isto é, devem-se analisar duas possibilidades: a maior rotação ocorrendo antes do ponto de ressonância e a menor rotação ocorrendo após o ponto de ressonância.

Para a rotação de 1000 rpm (104,7 rad/s) tem-se:

$$x_{m\&S} \geq \frac{F_0}{k_{eq} - m\omega^2} \Rightarrow 0,001 \geq \frac{0,05(104,7)^2}{k_{eq} - 20(104,7)^2} \Rightarrow k_{eq} \geq 767.346 \text{ N/m} \Rightarrow k \geq 191.836 \text{ N/m}$$

Para a rotação de 100 rpm (10,5 rad/s) tem-se:  $x_{m\&S} \geq \frac{F_0}{m\omega^2 - k_{eq}} \Rightarrow 0,001 \geq \frac{0,05(10,5)^2}{20(10,5)^2 - k_{eq}} \Rightarrow k_{eq} < 0$   
ou seja, esta condição não pode ser atendida.

Assim, apenas o absorvedor A atende à condição especificada, devendo-se utilizar um absorvedor com constante elástica

$k = 200.000 \text{ N/m}$ .

(valor: 5,0 pontos)